作用素代数のK-理論概論(代数的K-理論と代数的整数論)

鈴木, 治夫

数理解析研究所講究録
609巻 1987年 123-137

作用素代数のK－理論概論

北大理　鈴木治夫　(Haruo Suzuki)

作用素代数のK－理論は，一般的にBanach algebra上で展開される。　Banach algebra Aに対し$K_0(A)$，$K_1(A)$および連結準同形写像が導入され，Bott periodicityおよび周期6項完全列が示される。（[B]参照。）

Aが可換の場合，外積および対称積べき作用素が$K_0(A)$において定義され，さらにsuspension isomorphismとBott periodicityにより，可換Banach K－理論全体に拡大される。　$\Delta(A)$をAのmaximal ideal spaceとし，$K^0(\Delta(A))$を$\Delta(A)$の幾何学的K－理論とすると，自然な同形写像$K_0(A) \cong K^0(\Delta(A))$がある（例えば[T]参照）から，これは幾何学的K－理論における作用素（例えば[A]参照）の代数的定式化と見做される。　可換代数に対する純代数的K－理論の作用素はschemeの枠組の中で[S]によって展開されている。

この報告においては，或る非可換 C^*-algebras の K-理論に対する作用素の導入を試みる。 実際，一部の AF-algebras に対してはその構成が可能である。

§1，§2では，Banach algebras の K-理論を解説し C^*-algebras の K-理論を導びき，§3において K-理論の作用素を述べる。

§1. Banach algebras の K-理論

A を Banach algebra とする。 まず，A の K-理論，$K_0(A)$ および $K_1(A)$ を手短かに定義する。 $M_n(A)$ を A 上の $n \times n$ 行列全体の集合とし，異る n に対する同一視，

$$M_n(A) \equiv \begin{bmatrix} M_n(A) & 0 \\ 0 & 0_m \end{bmatrix} \subset M_{n+m}(A)$$

の下で，

$$M(A) = \bigcup_n M_n(A) = \varinjlim_n M_n(A)$$

とおく。 $P_n(A)$ を $M_n(A)$ のベキ等元全体の集合とする。 A が単位的である（1をもつ）とき，$GL_n(A)$ を $M_n(A)$ の可逆元全体の集合とする。 異る n に対する同一視，

$$GL_n(A) \equiv \begin{bmatrix} GL_n(A) & 0 \\ 0 & 1_m \end{bmatrix} \subset GL_{m+n}(A)$$

の下で,

$$GL(A) = \bigcup_n GL_n(A) = \varinjlim_n GL_n(A)$$

とおく。

$e, f \in \bigcup_n P_n(A)$ とし, $u \in GL_n(A)$ が存在して $ueu^{-1} = f$ となるとき $e \sim f$ と定める。この関係"$\sim$"は $\bigcup_n P_n(A)$ における同値関係となる。同値類全体の集合 $P(A) = (\bigcup_n P_n(A))/\sim$ は直和に関して可換半群となる。$K_0(A)$ は $P(A)$ の Grothendieck 群と定義される。

$GL_n(A)$ の単位行列 1_n の弧状連結成分 $GL_n^0(A)$ は不変部分群で, $GL_n(A)/GL_n^0(A)$ は群となる。$K_1(A) = \varinjlim_n (GL_n(A)/GL_n^0(A))$ と定められる。$GL_n(A)$ における弧状連結性は初等行列の積によって得られるから, $K_1(A)$ は可換群となる。したがって $K_1(A)$ は algebra A の Whitehead group ([M]参照)である。

$p, q \in P_n(A)$ で $pq = qp = 0$ ならば,

$$\begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p+q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}$$

となる。 $\mu: P(A) \to K_0(A)$ を標準準同形写像とし, $\mu(p) = [p]$ 等とかくことにする。 $K_0(A)$ の任意の元は $[p]-[q]$ $p, q \in P_n(A)$ の形に表わされ,

$$[p]-[q] = [p]-[q]+[q+1_n-q]-[1_n]$$
$$= [p \oplus (1_n - q)] - [1_n] .$$

或る $r \in P_n(A)$ に対して $p \oplus r \sim q \oplus r$ となるならば,

$$p \oplus 1_n \sim p \oplus r \oplus (1_n - r)$$
$$\sim q \oplus r \oplus (1_n - r)$$
$$\sim q \oplus 1_n$$

であるから, $K_0(A)$ において $[p]=[q]$ となるための必要十分条件は $p \oplus 1_n \sim q \oplus 1_n$ 。

この関係式から, 自然数 n に $[1_n]$ を対応させることによって得られる準同形写像 $\mathbb{Z} \to K_0(A)$ は単射となる。 とくに $A = \mathbb{C}$ の場合は全射となりしたがって

$$K_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z} .$$

また $GL_n(\mathbb{C})$ の任意の元は初等行列の積によって 1_n に変形されるので

$$K_1(\mathbb{C}) = 0 .$$

A が必ずしも単位的でない場合, A^+ を A に単位元 1 を添加して得られる Banach algebra とする。 すなわち $A^+ = \{(x, \lambda) \mid x \in A, \lambda \in \mathbb{C}\}$ で, 和, 積およびノルムは

$$(x,\lambda)+(y,\mu)=(x+y,\lambda+\mu),$$
$$(x,\lambda)(y,\mu)=(xy+\mu x+\lambda y,\lambda\mu),$$
$$\|(x,\lambda)\|=\|x\|+|\lambda|$$

によって与えられる。 AはA^+の両側イデアルで$A^+/A\cong\mathbb{C}$. φ: $A^+\to\mathbb{C}$を剰余写象とし，φ^*をK_i $(i=0,1)$ に関する誘導準同形写像とするとき，$K_i(A)=\mathrm{Ker}\,(\varphi^*: K_i(A^+)\to K_i(\mathbb{C}))$ と定義する。 Aが単位的である場合はAの単位元1_AによってA^+は$A\oplus\mathbb{C}$と直和分解し，$K_i(A^+)=K_i(A)\oplus K_i(\mathbb{C})$ となるので $\mathrm{Ker}\,(\varphi^*: K_i(A^+)\to K_i(\mathbb{C}))=K_i(A)$。

AがC^*-algebraであるとき，$M_n(A)$の射影元全体の集合を$\mathbb{P}_n(A)$とかく。 さらにAは単位的であるとする。 任意の$e\in\mathbb{P}_n(A)$に対し，$z=1+(e-e^*)(e^*-e)$は0をスペクトルに持たないから逆元$\tau=z^{-1}$がある。 直接計算により，

$$ze=ee^*e=ez,$$
$$e\tau=\tau e,\quad \tau e^*=e^*\tau,$$

が確かめられる。 $p=ee^*\tau$とおくと

$$p^*=\tau ee^*=ee^*\tau=p,$$
$$p^2=ee^*\tau ee^*\tau=\tau ee^*ee^*\tau=\tau zee^*\tau=p$$

と成り，また

$$ep=p,$$
$$pe=ee^*\tau e=ee^*e\tau=ez\tau=e,$$

$$(1-p+e)(1-e+p)=1,$$
$$(1-p+e)e(1-e+p)=e(1-e+p)=p\ .$$

ゆえに $p \sim e$.

したがって，$\mathbb{P}(A)=(\bigcup_n \mathbb{P}_n(A))/\sim$ とおくと，包含写像は同形写像 $\mathbb{P}(A) \cong P(A)$ を引きおこす。このことから単位的 C^*-algebra A に対して，$K_0(A)$ は $V(A)$ の Grothendieck 群となる。任意の $a \in GL_n(A)$ は一意的に

$$a = u \cdot h$$

と"極分解"する。ここで u はユニタリ元，$h=(a^*a)^{\frac{1}{2}}$。h は正元で，functional calculus の方法により $GL_n(A)$ の中で 1_n にホモトープとなることがいえる。$GL_n(A)$ のユニタリ元全体の部分群を $U_n(A)$ とし，$U_n(A)$ における 1_n の弧状連結成分を $U_n^0(A)$ とすれば，同形写像 $U_n(A)/U_n^0(A) \cong GL_n(A)/GL_n^0(A)$ が得られ，$K_1(A)=\varinjlim_n (U_n(A)/U_n^0(A))$．（[N] の解説参照．）

§2. $K_i(A)$ の性質

A を Banach algebra，$J \subset A$ を閉両側イデアルとする。このとき，連結準同形写像 $\delta^*: K_1(A/J) \to K_0(J)$ が次のように定義される。はじめ，A が単位的であるとする。$u \in$

$GL_n(A/J)$ に対し $w\in GL_{2n}(A)$ を $u\oplus u^{-1}\in GL_{2n}^0(A/J)$ のリフトとする。（存在は例えば [T, 4.8 Proposition] 参照。）
$(u\oplus u^{-1})1_n(u\oplus u^{-1})^{-1}=1_n$ であるから，$w1_nw^{-1}\in M_{2n}(J^+)$ で，その $M_{2n}(J)$ を法とする像は 1_n。ゆえに $[w1_nw^{-1}]-[1_n]\in K_0(J)$。
ここで $\delta^*([u])=[w1_nw^{-1}]-[1_n]$ と定める。

$\delta^*([u])$ は w，u のとり方によらない。w' が $u\oplus u^{-1}$ の別のリフトならば，$z=w'w^{-1}$ とおくと $z\in GL_{2n}(J^+)$ で，

$$[w'1_nw'^{-1}]-[1_n]=[zw1_nw^{-1}z]-[1_n]$$
$$=[w1_nw^{-1}]-[1_n]\ .$$

$[u']=[u]$ ならば，$v=u^{-1}u'\in GL_n^0(A/J)$ とおく。$a\in GL_n(A)$ を v のリフトとし，$b\in GL_n(A)$ を $uv^{-1}u^{-1}$ のリフトとする。

$$u'\oplus u'^{-1}=uv\oplus v^{-1}u^{-1}$$
$$=(u\oplus u^{-1})(v\oplus uv^{-1}u^{-1})$$

はリフト $w(a\oplus b)$ をもち，$(a\oplus b)1_n(a\oplus b)^{-1}=1_n$ 。

とくにAとしてヒルベルト空間上の有界作用素全体の C^*-algebra $B(\mathcal{H})$ をとり，$J=K(\mathcal{H})$ をコンパクト作用素全体，u を Calkin algebra A/J のユニタリ元とするとき，u がAの partial isometry v にリフトされるならば，$\delta^*([u])=[1-vv^*]-[1-v^*v]\in K_0(K)=\mathbb{Z}$ となって u の Fredholm index を与える。この意味で δ^* は index map ともよばれる。

Banach algebra A が必ずしも単位的でない場合，$A^+/J=$

$(A/J)^+$ であるから $K_1(A/J)=K_1((A/J)^+)=K_1(A^+/J)$ となり，δ^*: $K_1(A^+/J)\to K_0(J)$ はそのまゝ $K_1(A/J)\to K_0(J)$ を与える。短完全列 $0\to J\xrightarrow{i} A\xrightarrow{\pi} A/J\to 0$ に対し直接計算により，完全列

$$K_1(J)\xrightarrow{i_*}K_1(A)\xrightarrow{\pi_*}K_1(A/J)\xrightarrow{\delta^*}K_0(J)\xrightarrow{i_*}K_0(A)\xrightarrow{\pi_*}K_0(A/J)$$

が得られる。（詳細は例えば [B, §5, §8] 参照。）

Banach algebra A の <u>suspension</u> は，

$$SA=\{f:[0,1]\to A \mid \text{連続},\ f(0)=f(1)=0\}$$

で，pointwise algebra operations と supnorm により，これは Banach algebra となる。A の <u>cone</u> は，

$$CA=\{f:[0,1]\to A \mid \text{連続},\ f(0)=0\}$$

で，これもまた同様に Banach algebra となる。準同形写像 λ: $CA\to A$ を $\lambda(f)=f(1)$ によって定めると短完全列 $0\to SA\to CA\xrightarrow{\lambda}A\to 0$ が得られる。$K_i(A)$ $i=0,1$ の定義における同値関係は弧状連結性によっておきかえられるから $K_i(CA)=0$。したがって K_i に関する上記完全列から，

$$\alpha(=\delta^*):K_1(A)\cong K_0(SA).$$

$\Omega A=C(S^1,A)=\{f:[0,1]\to A \mid \text{連続},\ f(0)=f(1)\}$ は pointwise operations と supnorm により Banach algebra となり，準同形写像 η: $\Omega A\to A$ を $\eta(f)=f(1)$ によって定めると分解短完全列 $0\to SA\to\Omega A\xrightarrow{\eta}A\to 0$ が得られる。したがって分解短完全列

$$0 \to K_1(SA) \to K_1(\Omega A) \xrightarrow{\eta^*} K_1(A) \to 0$$

が対応し，$K_1(SA) = \mathrm{Ker}\,\eta^*$ となる。 Aが単位的であるとき $GL_n(\Omega A) = C(S^1, GL_n(A))$ の元をループとよぶ。 $K_1(SA)$ は基点1をもつ $GL(A)$ のループのホモトピー同値類とみることができる。

Aが必ずしも単位的でない場合，$e \in P(A^+)$ とし，$f_e = ze + (1_n - e) \in GL_n(\Omega(A^+))$ $(z = e^{2\pi i t})$ と定め，これをべき等元ループとよぶ。 $e_1, e_2 \in P_n(A)$ に対し $e_1 \equiv e_2 \bmod M_n(A)$ ならば $f = f_{e_1} \cdot f_{e_2}^{-1} \in GL_n(\Omega(A^+))$，$f(1) = 1_n$。 $e_1 \sim_h e_2$ (弧状連結) ならば，$GL_n(\Omega(A^+))$ において $f_{e_1} \sim_h f_{e_2}$，$f(1) = 1_n$ すなわち基点1に関し，ループとしてホモトープ。 f のホモトピー類を $[f]$ とかくと，Bott map $\beta : K_0(A) \to K_1(SA)$ が $\beta([e] - [1_n]) = [f_e f_{1_n}^{-1}]$ によって定められる。 このとき

$$\beta : K_0(A) \xrightarrow{\cong} K_1(SA).$$

この同形写像は次の4段階に分けて示される： i) ループを Stone-Weierstrass 定理により Laurant 多項式で近似し，ii) 多項式ループのホモトピーを多項式近似する。 ついで iii) 多項式ループを [A] によって線形ループに引きもどし，iv) holomorphic functional calculus によって線形ループのべき等元ループに引きもどす。

Bott periodicity とよばれるものは結合同形写像

$$\alpha\cdot\beta : K_0(A) \cong K_0(S^2A) ,$$
$$\beta\cdot\alpha : K_1(A) \cong K_1(S^2A)$$

のことである。 $0\to J\xrightarrow{i} A\xrightarrow{\pi} A/J\to 0$ が完全列ならば，6項周期完全列

$$\begin{tikzcd}
K_0(J) \arrow[r, "i^*"] & K_0(A) \arrow[r, "\pi^*"] & K_0(A/J) \arrow[d, "\delta^*"] \\
K_1(A/J) \arrow[u, "\delta^*"] & K_1(A) \arrow[l, "\pi^*"'] & K_1(J) \arrow[l, "i^*"']
\end{tikzcd}$$

が得られる。 こゝで $\delta^*: K_0(A/J)\to K_1(J)$ は結合写像。

$$K_0(A/J)\underset{\cong}{\overset{\beta}{\to}} K_1(S(A/J))\xrightarrow{\delta^*} K_0(SJ)\underset{\cong}{\overset{\alpha^{-1}}{\to}} K_1(J) .$$

§3. $K_0(A)$における作用素

Aが単位的可換Banach algebraの場合から始める。 Aの元の順序のついたn個の組の複素ベクトル空間$\oplus A$においてノルムを

$$\|(a_1,\dots,a_n)\| = \|a_1\|+\dots+\|a_n\|$$

によって定義して得られるBanach空間を$V^n(A)$とかく。

$M_n(A)$は$V^n(A)$上の作用素のノルムによってBanach algebraとなる。 $e_n\in P_n(A)$とするとき，e_nのi次テンソル積，$\otimes^i e_n : \otimes^i V^n(A)\to\otimes^i V^n(A)$ はベキ等作用素であり，その同値

類を $\otimes^i\{e_n\}=\{\otimes^i e_n\}$ とかく。

e_n の i 次交代積べき $\wedge^i e_n : \wedge^i V^n(A)\to\wedge^i V^n(A)$ $(i\leqq n)$ は $P_{\binom{n}{i}}(A)$ の元で，その同値類 $\wedge^i\{e_n\}=\{\wedge^i e_n\}$ が一意的に定まる。 同様に i 次対称積べき $\bigcirc^i e_n$ は $P_{\binom{n+i-1}{i}}(A)$ の元で，その同値類 $\bigcirc^i\{e_n\}=\{\bigcirc^i e_n\}$ も一意的に定まる。

$f: A\to B$ が単位的可換Banach algebrasの準同形写像であるとき，写像 $f_n: M_n(A)\to M_n(B)$, $(a_{ij})\mapsto(fa_{ij})$ したがって写像 $f_n^*: P_n(A)/\sim\ \to P_n(B)/\sim$ がひきおこされ，$\wedge^i$, $\bigcirc^i$ に関して自然である。 すなわち，$\wedge^i f_n^* = f^*_{\binom{n}{i}}\wedge^i$, $\bigcirc^i f_n^* = f^*_{\binom{n+i-1}{i}}\bigcirc^i$。

写像のテンソル積を "$\circ$" で表わすとき，$e, d\in P(A)$ に対して，

a) $\wedge^0\{e\}=1$,

b) $\wedge^1\{e\}=\{e\}$,

c) $\wedge^i(\{e\}\oplus\{d\}) = \sum_{j=0}^{i} \wedge^j\{e\}\cdot\wedge^{i-j}\{d\}$.

標準準同形写像 $\mu: P(A)\to K_0(A)$ により，$K_0(A)$ における作用素 $\wedge^i$, $i=0,1,\cdots$ が定まり，x, $y\in K_0(A)$ に対し

A) $\wedge^0 x=1$,

B) $\wedge^1 x=x$,

C) $\wedge^i(x+y)=\sum_{j=0}^{i}\wedge^j x\cdot\wedge^{i-j}y$.

$\wedge^i$ の自然性から，$\wedge^i: K_0(A)\to K_0(A)$ は functorial，すなわち図式，

$$\begin{tikzcd} K_0(A) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\lambda^i"'] & K_0(B) \arrow[d, "\lambda^i"] \\ K_0(A) \arrow[r, "f^*"] & K_0(B) \end{tikzcd}$$

が可換。 Aが必ずしも単位的でない場合，剰余写像φ: $A^+ \to A^+/A \cong \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{tikzcd} K_0(A^+) \arrow[r, "\varphi^*"] \arrow[d, "\lambda^i"'] & K_0(\mathbb{C}) \arrow[d, "\lambda^i"] \\ K_0(A^+) \arrow[r, "\varphi^*"] & K_0(\mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

が可換となる。 ゆえに $x \in K_0(A) = \mathrm{Ker}\,\varphi^*$ ならば，$\lambda^i x \in K_0(A) = \mathrm{Ker}\,\varphi^*$。

同様の方法により，可換Banach algebra A に対して自然な対称積べき作用素σ^i, $i = 0, 1, \cdots$ が一意的に定まり，x, $y \in K_0(A)$ とするとき，

A') $\sigma^0 x = 1$,

B') $\sigma^1 x = x$,

C') $\sigma^i(x+y) = \sum_{j=0}^{i} \sigma^j x \cdot \sigma^{i-j} y$.

次にAが非可換の場合に移る。 有限次元C^*-algebra は $\vec{p} = (p_1, \cdots, p_r) \in \mathbb{N}^r$, $\mathbb{N}$ は自然数全体とするとき，行列代数の直和

$$M(\vec{p}) = M_{p_1}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{p_r}(\mathbb{C})$$

の形である。 $M(\vec{q})$, $\vec{q} = (q_1, \cdots, q_s)$ を別の有限次元C^*-

algebra, $\psi: M(\vec{q}) \to M(\vec{p})$ を準同形写像とすると，ψ はユニタリ同値を除き

$$
\begin{aligned}
a_1\oplus\cdots\oplus a_s \mapsto\ & (\overbrace{a_1\oplus\cdots\oplus a_1}^{m_{11}}\oplus \overbrace{a_2\oplus\cdots\oplus a_2}^{m_{12}}\oplus\cdots\oplus \overbrace{a_s\oplus\cdots\oplus a_s}^{m_{1s}}\oplus 0_{n_1}) \\
& \oplus(\overbrace{a_1\oplus\cdots\oplus a_1}^{m_{21}}\oplus\cdots\ \oplus \overbrace{a_s\oplus\cdots\oplus a_s}^{m_{2s}}\oplus 0_{n_2}) \\
& \cdots \\
& \oplus(\overbrace{a_1\oplus\cdots\oplus a_1}^{m_{r1}}\oplus\cdots\ \oplus \overbrace{a_s\oplus\cdots\oplus a_s}^{m_{rs}}\oplus 0_{n_r}),
\end{aligned}
$$

$$a_j \in M(q_j) = M_{q_j}(\mathbb{C}) \qquad j=1,\cdots,s$$

と表わされる。（[E]参照。）したがって $\psi=\psi_{(m_{ij})}$ とかくことができる。

$\iota: \mathbb{C}^r \to M(\vec{p})$, $\vec{p}=(p_1,\cdots,p_r)$ を自然な包含写像とするとき，同形写像 $\iota^*: K_0(\mathbb{C}^r)\cong K_0(M(\vec{p}))$ が引きおこされる。ゆえに任意の $x\in K_0(M(\vec{p}))$ に対して外積べキ，対称積べキ作用素が

$$\lambda^i x = \iota^*(\lambda^i(\iota^{*-1}x)),$$

$$\sigma^i x = \iota^*(\sigma^i(\iota^{*-1}x))$$

によって定義される。

準同形写像 $\psi=\psi_{(m_{ij})}: M(\vec{q})\to M(\vec{p})$ としてとくに (m_{ij}) の各行が1を高々一つ含み他は0となるものだけを考えることにすれば，$\psi^*=(m_{ij}): K_0(M(\vec{q}))=\mathbb{Z}^s \to K_0(M(\vec{p}))=\mathbb{Z}^r$ は λ^i, σ^i を保存する。このような ψ^* を保存形とよぶことにする。保存形準同形写像の結合は再び保存形となる。

有限次元 C^*-algebras $M(\overrightarrow{p(n)})$, $\overrightarrow{p(n)}=(p_1(n),\cdots,p_{r_n}(n))$ および保存形準同形写像 $\psi_n: M(\overrightarrow{p(n)})\to M(\overrightarrow{p(n+1)})$ の列

$$(M(\overrightarrow{p(n)}),\psi_n):\ M(\overrightarrow{p(1)})\xrightarrow{\psi_1} M(\overrightarrow{p(2)})\xrightarrow{\psi_2}\cdots$$

を考える。 これは帰納的系を定め，その極限 $A=\varinjlim_{n} M(\overrightarrow{p(n)})$ はAF-algebraとよばれるものになる。 作用素 Λ^i, σ^i は ψ_n^*に関して自然であるから，$K_0(A)=\varinjlim_{\psi_n^*} K(M(\overrightarrow{p(n)}))$ における i次外積ベキ，対称積ベキ作用素が，それぞれ Λ^i_n, σ^i_n を $K_0(M(\overrightarrow{p(n)}))$ の作用素として，

$$\Lambda^i=\varinjlim_{\psi_n^*}\Lambda^i_n,$$
$$\sigma^i=\varinjlim_{\psi_n^*}\sigma^i$$

によって定められる。 これらはそれぞれ基本関係式 A), B), C) および A'), B'), C') をみたす。

参考文献

[A] M. F. Atiyah, K-Theory, Benjamin, New York, 1967.

[B] B. Blackadar, K-Theory for Operator Algebras, Preprints.

[E] E. Effros, Dimensions and C^*-Algebras, CBMS Regional Conf. Ser. in Math. no. 46, Amer. Math. Soc., Providence, 1981.

[M] J. Milnor, Introduction to Algebraic K-Theory, Ann. of Math. Studies 72, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1971.

[N] 中神祥臣, C^*環とK理論, 京都大学数理解析研究所講究録 488 (1983), 1 - 26.

[S] C. Soulé, Opérations en K-Théorie algébriques, Canad. J. Math. 37 (1985), 488 - 550.

[T] J. Taylor, Banach algebras and topology, Algebras in Analysis, ed. J. H. Williamson, Academic Press, New York, 1975, 118 - 186.